

ANNEXE

ETUDE DES PALIERS A BILLES

1. Bases théoriques

La théorie de Hertz [GRAG-89] considère les contraintes et les déformations de deux corps lisses et ellipsoïdes en contact (Fig. F.1).

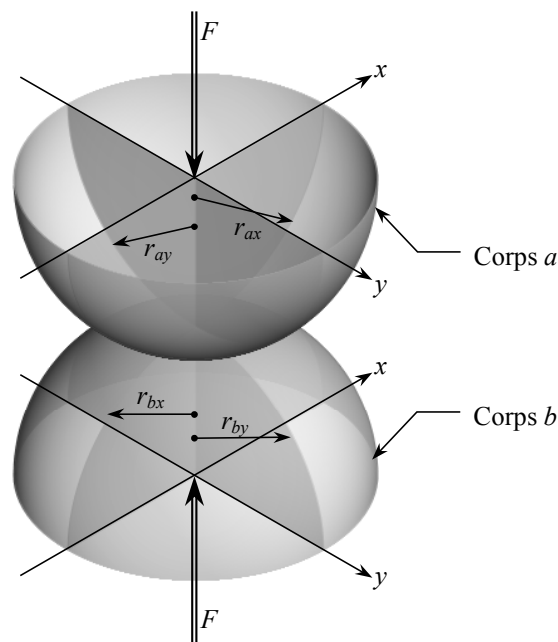


Fig. F.1. Caractéristiques dimensionnelles de deux ellipsoïdes en contact

Elle permet, moyennant le respect des hypothèses suivantes :

- matériaux homogènes ;
- contraintes inférieures à la limite d'élasticité de ces matériaux ;
- dimensions de la zone de contact faibles par rapport aux rayons des ellipsoïdes ;
- corps en équilibre statique ;

d'exprimer la distribution de pression sur la surface de contact entre les deux ellipsoïdes ainsi que leur déformation.

Ces expressions font intervenir des paramètres géométriques :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{ax}} + \frac{1}{R_{bx}}, \quad (\text{F.1})$$

$$\alpha_r = \frac{R_y}{R_x}, \quad (\text{F.2})$$

où :

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{r_{ax}} + \frac{1}{r_{bx}}, \quad (\text{F.3})$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{r_{ay}} + \frac{1}{r_{by}}, \quad (\text{F.4})$$

et des paramètres constitutifs :

$$E' = \frac{2}{\frac{(1-\nu_a^2)}{E_a} + \frac{(1-\nu_b^2)}{E_b}}, \quad (\text{F.5})$$

E_a , E_b et ν_a , ν_b étant respectivement le module de Young et le module de poisson des corps a et b . Outre ces paramètres, elles dépendent également de k_e , le paramètre elliptique, \mathcal{E} , l'intégrale elliptique du premier type, et \mathcal{F} , l'intégrale elliptique du second type. Suivant la théorie de Hertz classique, ces trois grandeurs sont déduites de la solution d'une équation transcendante les reliant à la géométrie des corps en contact. [HAMROCK-99] propose cependant une solution analytique dépendant directement du paramètre géométrique α_r (Tableau F.1).

$1 \leq \alpha_r \leq 100$	$0.01 \leq \alpha_r \leq 1$
$k_e = \alpha_r^{2/\pi}$ $\mathcal{F} = \frac{\pi}{2} + q_a \cdot \ln \alpha_r$ (F.6) $\mathcal{E} = 1 + \frac{q_a}{\alpha_r}$	$k_e = \alpha_r^{2/\pi}$ $\mathcal{F} = \frac{\pi}{2} + q_a \cdot \ln \alpha_r$ (F.7) $\mathcal{E} = 1 + q_a \cdot \alpha_r$
où : $q_a = \frac{\pi}{2} - 1$	

Tableau F.1. Expressions analytiques proposées par [HAMROCK-99] pour les paramètres k_e , \mathcal{E} et \mathcal{F}

La distribution de pression sur la surface (Fig. F.2) de contact est finalement donnée par la relation :

$$p = p_{\max} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot x}{D_x}\right)^2 - \left(\frac{2 \cdot y}{D_y}\right)^2}, \quad (\text{F.9})$$

où D_x et D_y , les diamètres principaux de la surface de contact, valent :

$$D_x = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{6 \cdot \mathcal{C} \cdot F \cdot R}{\pi \cdot k_e \cdot E'}}, \quad (\text{F.10})$$

$$D_y = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{6 \cdot k_e^2 \cdot \mathcal{C} \cdot F \cdot R}{\pi \cdot E'}}, \quad (\text{F.11})$$

et p_{\max} , la pression maximale :

$$p_{\max} = \frac{6 \cdot F}{\pi \cdot D_x \cdot D_y}, \quad (\text{F.12})$$

étant donné que l'intégration de la pression sur la surface de contact équivaut à la force F appliquée entre les deux corps.

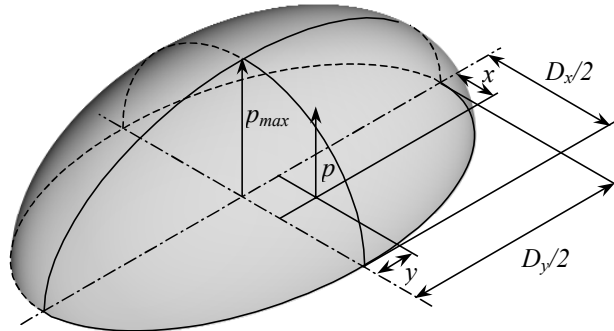


Fig. F.2. Distribution de la pression sur la surface de contact entre deux corps

La déformation subie est, quant à elle, donnée par la relation :

$$\delta_{\max} = \mathcal{F} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2 \cdot \mathcal{C} \cdot R} \cdot \left(\frac{F}{\pi \cdot k_e \cdot E'}\right)^2}. \quad (\text{F.13})$$

2. Exploitation

2.1. Calcul de la capacité de charge

Deux critères différents permettent de déterminer la charge limite que peuvent supporter deux corps en contact. Le premier, repris par [BRÄNDLEIN-99] pour le dimensionnement des paliers à billes et à rouleau, impose une limite supérieure à la

déformation totale. Dans le cas statique, par exemple, cette limite est fixée à 0,01 % du diamètre de l'élément roulant. Le second critère, plus général, consiste à comparer la pression maximum p_{max} apparaissant entre les corps en contact à la limite d'élasticité des matériaux les constituant.

Dans le cadre de notre étude, c'est ce dernier critère que nous avons considéré. Moyennant quelques manipulations algébriques des relations (F.10), (F.11) et (F.12), il permet d'exprimer, en fonction des caractéristiques géométriques et constitutives des corps en contact, la force maximale qu'ils peuvent supporter :

$$F_{max} = \left(\frac{\pi \cdot D'_x \cdot D'_y \cdot \sigma_{LE}}{6} \right)^3, \quad (\text{F.14})$$

où :

$$D'_x = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{6 \cdot \mathcal{E} \cdot R}{\pi \cdot k_e \cdot E'}}, \quad (\text{F.15})$$

$$D'_y = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{6 \cdot k_e^2 \cdot \mathcal{E} \cdot R}{\pi \cdot E'}}. \quad (\text{F.16})$$

La capacité de charges d'un système donné est donc obtenue en additionnant les contributions au support de chacun des éléments constituant le système. Afin d'illustrer ce propos, prenons le cas d'un roulement à bille classique (Fig. F.3).

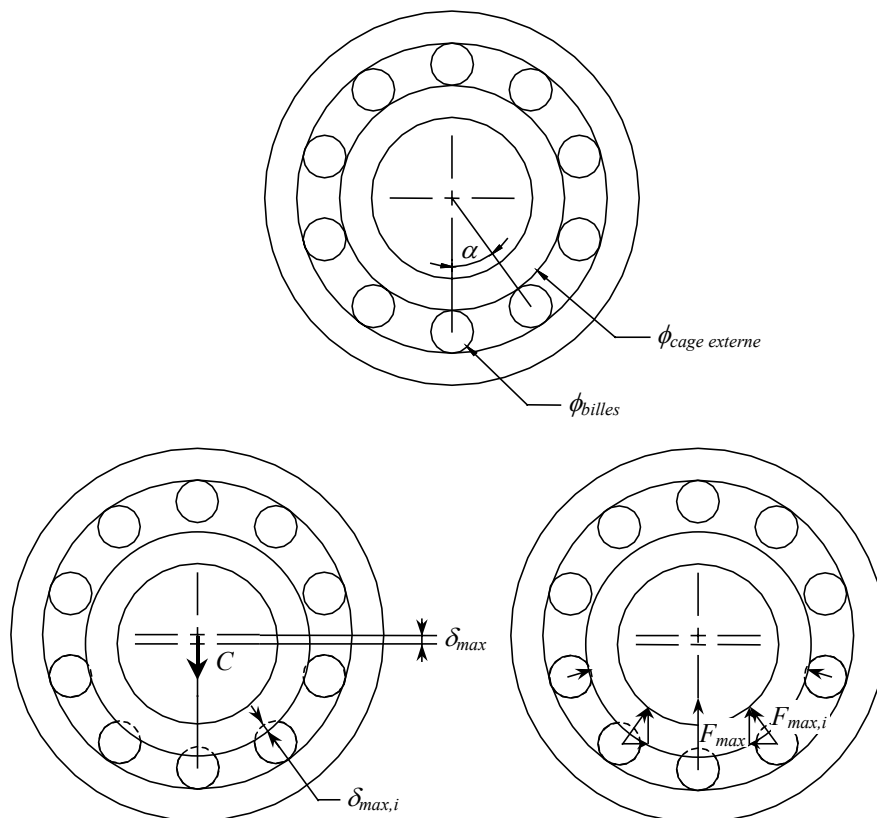


Fig. F.3. Distribution des billes, de leur déformation et de leur charge dans un roulement classique

Dans ce cas, le contact entre la bille inférieure et la bague intérieure étant le plus contraignant, c'est ce dernier qui conditionne la capacité de charge du palier. En effet, la relation (F.14) détermine la force maximum que cette bille peut supporter et donc, via l'équation (F.13), la déformation qu'elle subit sous cette charge. Cette déformation va, à son tour, déterminer la déformation des autres billes via la relation géométrique :

$$\delta_{\max,i} = \delta_{\max} \cdot \cos(i.\alpha), \quad (\text{F.17})$$

où $i.\alpha$ correspond à l'écart angulaire de la bille i par rapport à la direction de la charge C .

Connaissant la déformation de chacune des billes du roulement, il devient possible, en inversant la relation (F.13), de calculer la charge supportée par chacune d'elles :

$$F_i = \pi.k_e.E' \sqrt{\frac{2.C.R}{9} \left(\frac{\delta_{\max,i}}{\mathcal{F}} \right)^3}. \quad (\text{F.18})$$

Cette charge étant radiale, seule la composante alignée avec la direction de mise en charge, donnée par la relation :

$$F_{//,i} = F_i \cdot \cos(\alpha.i), \quad (\text{F.19})$$

participe effectivement à la capacité de charge du palier.

La capacité de charge du palier C est finalement obtenue en additionnant les contributions de toutes les billes subissant une déformation non nulle :

$$C = F_{\max} + 2.F_1 \cdot \cos(\alpha) + \dots + 2.F_i \cdot \cos(\alpha.i) + \dots. \quad (\text{F.20})$$

2.2. Calcul de la rigidité

Une fois la capacité de charge déterminée, le calcul de la rigidité est trivial. En effet, nous connaissons déjà les deux grandeurs entrant dans sa définition :

$$F = \frac{C}{\delta_{\max}}. \quad (\text{F.21})$$